**Teorema de Weierstrass**

Una función continua en un intervalo cerrado, tiene máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo.  
  
H) f es continua en [a,b].  
T) f tiene máximo y mínimo absoluto en [a,b].

**Demostración:**

Por hipótesis, f es continua en [a,b] => por el lema de Weierstrass f está acotada en [a,b], es decir, existen m y n tales que m <= f(x) <= n para todo x perteneciente a [a,b].

La demostración se realiza por reducción al absurdo.

Primero demostraremos que f tiene máximo absoluto en [a,b].  
Queremos probar que existe x1 perteneciente a [a,b] / f(x1) = n.  
Supongamos lo contrario de lo que queremos demostrar, o sea que para todo x perteneciente a [a,b] f(x) ≠ n,f(x) < n.

Sea g una función auxiliar: g(x)=1/(n - f(x)).

g es continua en [a,b] por ser diferencia y cociente de funciones continuas y n - f(x) ≠ 0. Por el lema de Weierstrass, g está acotada, es decir, para todo x perteneciente a [a,b]

s <= g(x) <= t

1/(n - f(x)) <= t

1/t <= n - f(x)

f(x) <= n - 1/t

=> n - 1/t es una cota superior de f en [a,b] (1)

Por otro lado g(x) > 0 => t > 0 => 1/t > 0 => n - 1/t < n (2)

De (1) y (2) se deduce que existe una cota superior de f menor que n, el extremo superior, lo cual es absurdo, pues el extremo superior es la menor de las cotas superiores.

El absurdo surge de suponer que no existe x tal que f(x)=n, por lo tanto existe x1 perteneciente a [a,b] / f(x1)=n.

Demostraremos ahora que f tiene mínimo absoluto.  
Procederemos como en el caso anterior, por el absurdo.  
Supondremos que para todo x perteneciente a [a,b] f(x) ≠ m, f(x) > m.

Sea h una función auxiliar: h(x) = 1/(f(x)-m)

h es continua en [a,b] por ser diferencia y cociente de funciones continuas y f(x)≠m.  
Por el lema de Weierstrass, h está acotada, es decir, para todo x perteneciente a [a,b]

h <= h(x) <= k

1/(f(x)-m) <= k

1/k <= f(x) - m

f(x) >= 1/k + m

=> 1/k + m es una cota inferior de f (1)

Por otro lado h(x)>0 => k>0 => 1/k>0 => 1/k + m > m (2)

De (1) y (2) se deduce que existe una cota inferior de f mayor que el extremo inferior, lo cual es absurdo.  
Este absurdo proviene de suponer que no existe x tal que f(x)=m.  
Por lo tanto, sí existe algún x tal que f(x)=m.